

Varianta 096

Subiectul I

- a) $AB = 5\sqrt{2}$.
- b) $a = 11, b = -10$.
- c) $S = \frac{11\sqrt{3}}{4}$.
- d) $\bar{z} = -9 + 5i$
- e) $a = -1, b = 5$.
- f) $BC = 13$.

Subiectul II

1.

- a) $\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 30 & 3 \end{vmatrix} = -30$.
- b) $p = \frac{3}{5}$.
- c) $x = \frac{2}{3}$.
- d) $x = 10^{10}$.
- e) Prin aplicarea algoritmului de împărțire obținem restul 3.

2.

- a) $f'(x) = -\frac{5}{x^6}, x \neq 0$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -5$.
- c) ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f este $y = 3$.
- d) $\int_1^2 f(x) dx = \frac{207}{64}$.
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} ((n^5 + 1) \cdot f(n)) = \infty$.

Subiectul III

- a) $A + I_2 = B$.
- b) Prin calcul rezultă că $A^2 = O_2$.

c) $B^2 = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 16 & -7 \end{pmatrix}.$

d) $\frac{5x-2}{8x-3} - \frac{1}{2} = \frac{2x-1}{2(8x-3)} > 0, \forall x > \frac{1}{2}.$

e) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{5f(x)-2}{8f(x)-3} = \frac{9x-4}{16x-7}$

f) Notăm $P(n): B^n = I_2 + nA, \forall n \in \mathbf{N}^*.$

Pentru $n=1$ obținem $B^1 = I_2 + A$, adevărat din punctul a).

Presupunând că $P(k)$ este adevărată pentru $k \in \mathbf{N}^*$, arătăm că $P(k+1)$ este adevărată.

Dar $B^{k+1} = B^k \cdot B = (I_2 + kA) \overset{a)}{B} = (I_2 + kA)(I_2 + A) = I_2 + kA + A + kA^2$

$\overset{b)}{=} I_2 + kA + A = I_2 + (k+1)A.$

Deci $P(k+1)$ este adevărată.

Ambele etape fiind verificate, concluzionăm că $\forall n \in \mathbf{N}^*, B^n = I_2 + nA.$

g) Demonstrăm prin inducție, relația cerută.

$P(n): \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{de } n \text{ ori } f}(x) = \frac{(4n+1)x-2n}{8nx+1-4n}, n \in \mathbf{N}^*.$

Presupunând că $P(k)$ este adevărată pentru $k \in \mathbf{N}^*$, arătăm că $P(k+1)$ este adevărată.

Dar $\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{de } k+1 \text{ ori } f}(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{de } k \text{ ori } f}(f(x)) = \frac{(4k+1)f(x)-2k}{8kf(x)+1-4k}$
 $= \frac{(4k+5)x-2k-2}{8(k+1)x-4k-3}.$ Deci $P(k+1)$ este adevărată.

Ambele etape fiind verificate, concluzionăm că $\forall n \in \mathbf{N}^*,$

$\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{de } n \text{ ori } f}(x) = \frac{(4n+1)x-2n}{8nx+1-4n}.$

Subiectul IV

a) $u'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}, \forall x \in A.$

b) $f(x) \cdot u(x) = x(x^2-1) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) = x^2 - 1 + x(x+1) + x(x-1)$
 $= 3x^2 - 1 = f'(x) = g(x).$

c) $u'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} < 0, \forall x \in A.$

d) Din b) rezultă că

$$u(x) = \frac{g(x)}{f(x)} \Rightarrow u'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f^2(x)} = \frac{h(x)f(x) - g^2(x)}{f^2(x)}, \forall x \in A.$$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) = 0$, deci ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției u este $y = 0$.

f) $\int_4^5 u(x) dx = [\ln x + \ln(x-1) + \ln(x+1)]_4^5 = \ln 5 - \ln 4 + \ln 4 - \ln 3 + \ln 6 - \ln 5 = \ln 2$

g) Din punctul d) avem $u'(x) = \frac{f(x) \cdot h(x) - g^2(x)}{f^2(x)} < 0, \forall x \in A$. Rezultă

$f(x) \cdot h(x) < g^2(x), \forall x \in \mathbb{R} - \{0, -1, 1\}$. Pentru $x = 0, x = 1, x = -1$ se verifică prin calcul.